Diagonalisation asymptotique d'opérateurs de Hilbert-Schmidt

Benjamin Boutin, Nicolas Raymond

Diagonalisation asymptotique d'opérateurs de Hilbert-Schmidt

Benjamin Boutin & Nicolas Raymond
IRMAR Université de Rennes 1

Problème de Cauchy d'inconnue $H(t) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$: $\begin{cases} H' = [H, G(H)]\,, & t \in \mathbb{R} \\ H(0) = H_0 \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H}) \end{cases}$

Résultats préliminaires

Existence d'un flot global isospectral

Supposons que $G : \mathcal{L}_2(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ est régulière et que $G(\mathcal{S}_2(\mathcal{H})) \subset \mathcal{A}_2(\mathcal{H})$.

Il existe une unique solution $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{S}_2(\mathcal{H}))$.

De plus, il existe $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$, tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ H(t) = U^\star(t) H_0 U(t)$.

Exemples de fonction G :

Brockett [3]	$G_{\mathsf{Bro}}(H) = [H, A]$ avec $A = \mathsf{diag}(a_i) \in \mathcal{D}_2(\mathcal{H})$
Toda	$G_{\mathsf{Tod}}(H) = H^- - (H^-)^\star$
Wegner	$G_{\mathsf{Weg}}(H) = [H, \mathsf{diag}(H)]$

Solutions de $G(H_\infty) = 0$:

Tous les opérateurs diagonaux $H_\infty = \mathsf{diag}(\alpha_\ell)$ sont des points d'équilibre. Sous certaines conditions la réciproque est vraie.

Notons $(E_{i,j})$ et $(F_{i,j})$ les bases respectives de $\mathcal{S}_2(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A}_2(\mathcal{H})$, canoniquement associées à (e_n).

"Diagonalisation" de G :

Soit $G \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2(\mathcal{H}), \mathcal{A}_2(\mathcal{H}))$. S'il existe une famille antisymétrique $(g_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ telle que $G(E_{i,j}) = g_{i,j} F_{i,j}$, alors G est dite diagonalisable de valeurs propres $g_{i,j}$.

- G_{Bro} diagonalisable avec $g_{i,j} = a_j - a_i$.
- G_{Tod} diagonalisable avec $g_{i,j} = -1$ pour $i < j$.
- G_{Weg} n'est pas linéaire.

Diagonalisation de $\mathsf{d}F_{H_\infty}$ avec $F(H) = [H, G(H)]$:

$$\mathsf{d}F_{H_\infty}(E_{i,j}) = g_{i,j}(\alpha_i - \alpha_j) E_{i,j}$$

Résultats de convergence

Une famille de fonctions $(g_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sera dite :

- équilibrée si : $\forall i,j \in \mathbb{N},\ \exists c_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+),\ \forall t \in \mathbb{R},\ |g_{i,j}(t)| \leq c_{i,j}(t) |g_{j,i}(t)|$,
- bornée ponctuellement si : $\forall t \in \mathbb{R},\ \sup_{i,j} |g_{i,j}(t)| < +\infty$.

Intégrabilité et convergence

Soit $H = (h_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}_2(\mathcal{H}))$ tel que
- $\|H(t)\|_{\mathsf{HS}}$ est bornée indépendamment de t
- la famille $(h_{i,j})$ est équilibrée
- il existe une famille de fonctions mesurables $(g_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$, équilibrée et bornée ponctuellement, définie sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h'_{i,i}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} g_{i,j}(t) |h_{i,j}(t)|^2 .$$

i) Supposons qu'il existe $T > 0$ et $(\epsilon_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, tels que $\forall t \geq T,\ \forall k, \ell \in \mathbb{N},\ k \geq \ell,\ \epsilon_\ell g_{\ell,k}(t) \geq 0$.
Alors on a la propriété d'intégrabilité

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |g_{\ell,j}(t)| |h_{\ell,j}(t)|^2 \, \mathrm{d}t < +\infty ,$$

et chacun des termes diagonaux $h_{\ell,\ell}(t)$ admet une limite notée $h_{\ell,\ell}(\infty)$.

ii) Sous l'hypothèse supplémentaire : $\forall \ell \in \mathbb{N},\ \exists c_\ell > 0,\ \forall j \neq \ell,\ \forall t \geq T,\ |g_{\ell,j}(t)| \geq c_\ell$, on a

$$\sum_{j\neq\ell} \int_T^{+\infty} |h_{\ell,j}(t)|^2 \, dt = \int_T^{+\infty} \|H(t)e_\ell - h_{\ell,\ell}(t)e_\ell\|^2 \, \mathrm{d}t < +\infty .$$

iii) Si de plus pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \|H'(t)e_\ell\|$ est bornée, alors pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $H(t)e_\ell$ converge vers $h_{\ell,\ell}(\infty)e_\ell$.

Convergence – cas $\dim \mathcal{H} = d < \infty$

Sous les hypothèses précédentes,

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = H_\infty = \mathsf{diag}\,(\alpha_\ell)_{0\leq\ell\leq d-1}$$

où les α_ℓ sont les valeurs propres avec multiplicité de H_0.
Supposons, de plus, qu'elles sont valeurs propres simples.

Alors

$$\|H(t) - H_\infty\| \leq C e^{-\gamma t} ,$$

où $\gamma = \inf_{\mathcal{T}^-} |g_{i,j}(\alpha_i - \alpha_j)| > 0$ avec

$$\mathcal{T}^- = \left\{ (i,j) \in \{0, \dots, d-1\}^2 : i < j \text{ et } g_{i,j}(\alpha_i - \alpha_j) < 0 \right\} .$$

Décomposition de Chu et Norris

Soit $G : \mathcal{L}_2(\mathcal{H}) \to \mathcal{A}_2(\mathcal{H})$ et considérons le problème de Cauchy posé pour une donnée initiale quelconque $H(0) = H_0 \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$.
Considérons les problèmes satellites suivants :

$$g_1'(t) = g_1(t) G(H(t)) , \qquad g_1(0) = \mathrm{Id} ,$$
$$g_2'(t) = (H(t) - G(H(t))) g_2(t) , \qquad g_2(0) = \mathrm{Id} .$$

Résultat adapté de [2] :
Les solutions H, g_1 et g_2 sont globales et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus
- g_1 est à valeurs dans $\mathcal{U}(\mathcal{H})$
- $H(t) = g_1(t)^{-1} H_0 g_1(t) = g_2(t) H_0 g_2^{-1}(t)$
- $e^{tH_0} = g_1(t) g_2(t)$ et $e^{tH(t)} = g_2(t) g_1(t)$

Algorithme QR [1] :
$e^{H(0)} = g_1(1) g_2(1)$ et $e^{H(1)} = g_2(1) g_1(1)$.
Dans le cas du flot de Toda, $g_1(t) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ et $g_2(t)$ est triangulaire supérieure : on reconnaît l'algorithme discret correspondant à la méthode traditionnelle QR.

Vitesse de convergence de la méthode QR en dimension infinie

Soit $H_0 \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ diagonalisable de valeurs propres $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ordonnées selon les parties réelles décroissantes.
Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $P H_0 P^{-1} = \Lambda$ où $\Lambda = \mathsf{diag}(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}_2(\mathcal{H})$ et tel que pour tout $J \in \mathbb{N}$, le mineur $P_J = (\langle Pe_i, e_j \rangle)_{0\leq i,j\leq J}$ est inversible. Alors

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad H(t)e_\ell - \sum_{j=\ell+1}^{+\infty} \langle H(t)e_\ell, e_j \rangle e_j = \alpha_\ell e_\ell + \mathcal{O}\left(e^{-t\delta_\ell}\right) , \quad \delta_\ell = \min_{0\leq j\leq \ell} \Re(\alpha_j - \alpha_{j+1}) .$$

Notations

Structure hilbertienne
$\mathcal{H}$ espace de Hilbert réel séparable, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$
$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de $\mathcal{H}$

Opérateurs particuliers Étant donné $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$
H^- partie inférieure de H : $\langle e_i, H^- e_j \rangle = \langle e_i, H e_j \rangle \delta_{i\geq j}$
Crochet : $[A, B] = AB - BA$

Norme Hilbert-Schmidt
$\|H\|_{\mathsf{HS}}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|He_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n(H)|^2$

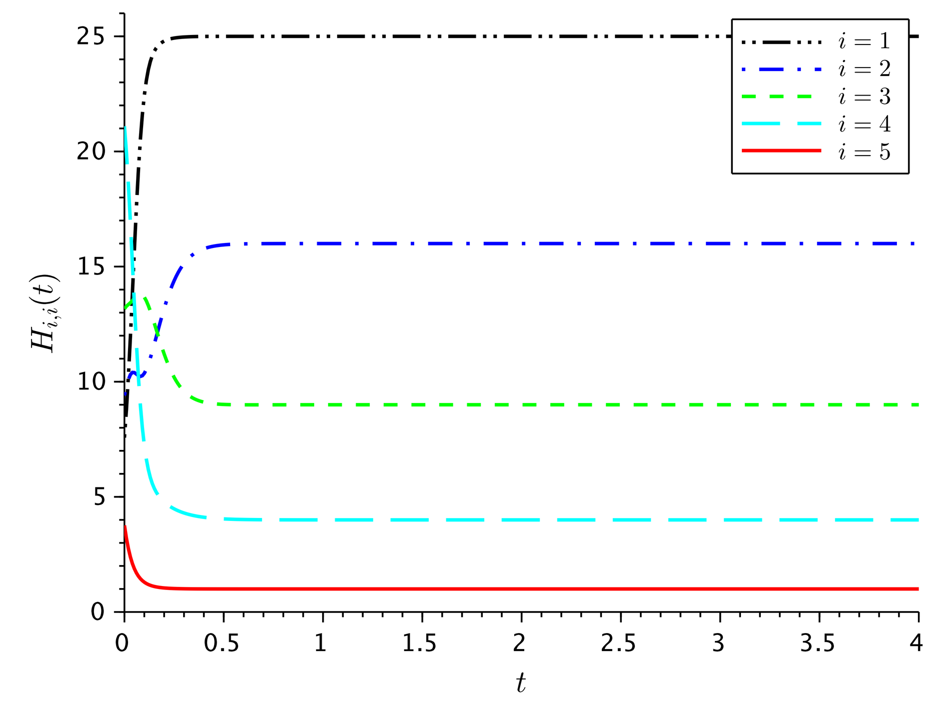
Ensemble d'opérateurs sur $\mathcal{H}$

$\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$	opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}$	
$\mathcal{S}(\mathcal{H})$	opérateurs symétriques : $H^\star = H$	$\mathcal{S}_2(\mathcal{H}) = \mathcal{S}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$
$\mathcal{A}(\mathcal{H})$	opérateurs antisymétriques : $H^\star = -H$	$\mathcal{A}_2(\mathcal{H}) = \mathcal{A}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$
$\mathcal{D}(\mathcal{H})$	opérateurs diagonaux : $\langle He_i, e_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}$	$\mathcal{D}_2(\mathcal{H}) = \mathcal{D}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$
$\mathcal{U}(\mathcal{H})$	opérateurs unitaires : $U^\star U = \mathsf{Id}$	

Illustrations numériques

- $H_\infty = \mathsf{diag}(\alpha_\ell)$ avec $\alpha_\ell = \ell^2$, $\quad 1 \leq \ell \leq 5$:

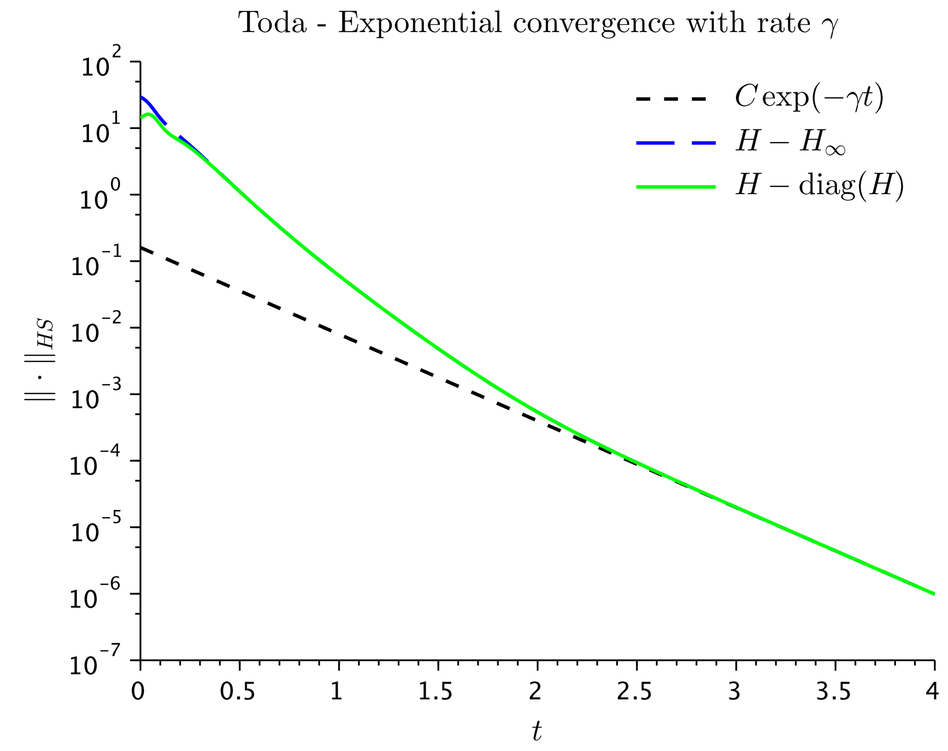
Toda - Convergence of diagonal entries of $H(t)$



- $g_{i,j}(\alpha_i - \alpha_j)$:

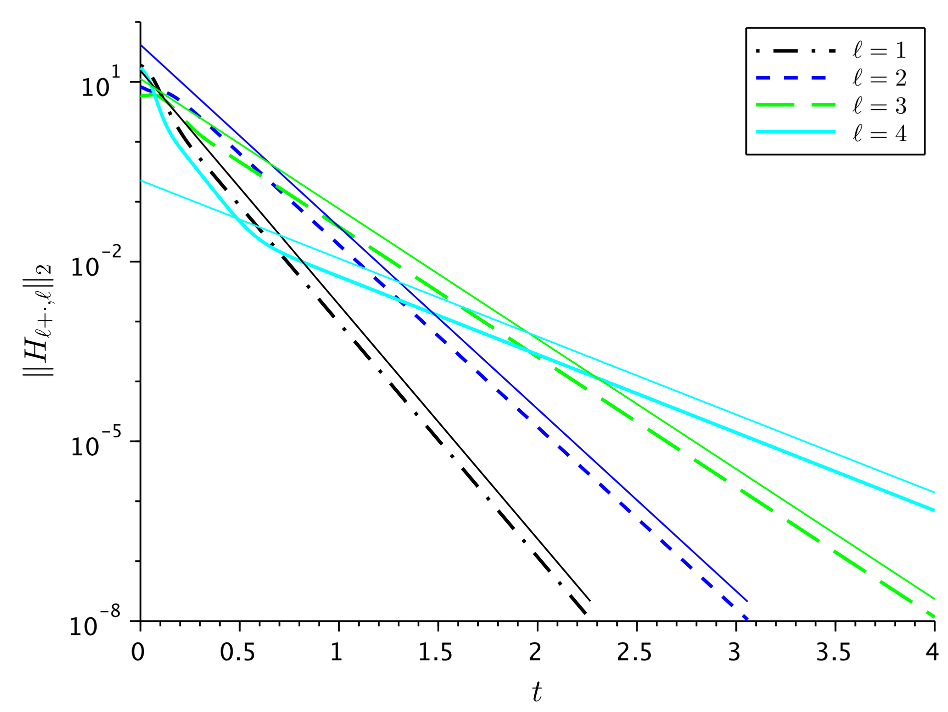
$$\begin{pmatrix} 0 & -9 & -16 & -21 & -24 \\ -9 & 0 & -7 & -12 & -15 \\ -16 & -7 & 0 & -5 & -8 \\ -21 & -12 & -5 & 0 & -3 \\ -24 & -15 & -8 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Toda - Exponential convergence with rate γ



- $\Re(\alpha_\ell - \alpha_{\ell+1}) \in \{9, 7, 5, 3\}$

Toda - Convergence of extradiagonal entries



Références

[1] Rutishauser, H., *Ein infinitesimales Analogon zum Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Arch. Math. (Basel), 5, 1954.

[2] Chu, M. T. and Norris, L. K., *Isospectral flows and abstract matrix factorizations*, SIAM J. Numer. Anal., 25 (6), 1988.

[3] Bach, V. and Bru, J.-B., *Rigorous foundations of the Brockett-Wegner flow for operators*, J. Evol. Equ., 10 (2), 2010.

[4] Boutin, B. and Raymond, N., *Some remarks about flows of Hilbert-Schmidt operators*, JEE, to appear.